Concursul “PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”
ediţia a XIII-a, Baia Mare, 24 noiembrie 2018

CLASA a VIII-a

Subiectul 1.

a) Arătați că pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ are loc inegalitatea $x^2 + y^2 + xy \geq 0$.

Precizați când are loc cazul de egalitate.

b) Demonstrați că pentru orice $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ are loc inegalitatea:

$$\frac{a+b-2}{a^2+b^2+ab} + \frac{b+c-2}{b^2+c^2+bc} + \frac{c+a-2}{c^2+a^2+ca} \leq \frac{1}{2}$$

Subiectul 2.

a) Arătați că pentru orice a,b,c numere reale are loc egalitatea:

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) + 3abc\ .$$

b) Determinați toate tripletele de numere reale (a, b, c) cu $a \leq b \leq c$ pentru care au loc simultan relațiile:

$$a + b + c = 6,$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 14,$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = 36.$$

Subiectul 3.

Fie $A = \{n_1, n_2, \ldots, n_{11}\}$ o mulțime formată din 11 numere prime și $S = {n_1}^4 + {n_2}^4 + \cdots + {n_{11}}^4$. Arătați că $S \ \vdots\ 10$ dacă și numai dacă $2 \in A$ și $5 \in A$.

Subiectul 4.

Se consideră punctele necoplanare *A*, *B*, *C* și *D*. Printr-un punct *M* de pe segmentul (*AB*) se duce un plan paralel cu dreptele *AC* și *BD*. Acest plan intersectează pe *BC* în *Q*, pe *CD* în *P* și pe *AD* în *N*.

a) Arătați că *MNPQ* este paralelogram.

b) Determinați poziția punctului *M* astfel încât aria paralelogramului *MNPQ* să fie maximă.

Notă:

1) Timp de lucru 3h.

2) Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

Baia Mare, str. Culturii, nr. 2, cod poştal 430282
Telefon şi fax: 0262211943, mobil secretariat: 0730123630
Cod fiscal 3825932, e-mail: lucaciu@lucaciu.multinet.ro

Concursul “PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”
ediția a XIII-a, Baia Mare, 24 noiembrie 2018
CLASA a VIII-a
Barem

Subiectul 1.

a) Arătați că pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ are loc inegalitatea $x^2 + y^2 + xy \geq 0$.

Precizați când are loc cazul de egalitate.

b) Demonstrați că pentru orice $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ are loc inegalitatea:

$$\frac{a+b-2}{a^2+b^2+ab} + \frac{b+c-2}{b^2+c^2+bc} + \frac{c+a-2}{c^2+a^2+ca} \leq \frac{1}{2}$$

Soluție.

a) $x^2 + y^2 + xy \geq 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2xy \geq 0 \Leftrightarrow (x+y)^2 + x^2 + y^2 \geq 0$ **2p**
Egalitate are loc pentru x=y=0 ....**1p**
b)
$\frac{a+b-2}{a^2+b^2+ab} \leq \frac{1}{6} \Leftrightarrow a^2 + b^2 + ab \geq 6a + 6b - 12 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + ab - 6a - 6b + 12 \geq 0$ **1p**
$(a-2)^2 + (b-2)^2 + (a-2) \cdot (b-2). \geq 0$...adevărată conform a)..**2p**
Se aduna inegalitățile analoage **1p**

Subiectul 2.

a) Arătați că pentru orice a,b,c numere reale are loc egalitatea:

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3abc\,.$$

b) Determinați toate tripletele de numere reale (a, b, c) cu $a \leq b \leq c$ pentru care au loc simultan relațiile:

$$a + b + c = 6,$$
$$a^2 + b^2 + c^2 = 14,$$
$$a^3 + b^3 + c^3 = 36$$

Vlad Robu

Soluție.
a) Calcul **2p**
b) Se verifică că $(a, b, c) = (1,2,3)$ este bun...**1p**
$(a+b+c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2) = 2(ab + bc + ca) \Longrightarrow ab + bc + ca = 11$ **1p**
Din punctul a) $\Longrightarrow abc = 6$ **1p**
$(a-2)(b-2)(c-2) = abc - 2(ab + bc + ca) + 4(a + b + c) - 8 = 0$ **1p**
Dacă $a = 2$ *sau* $c = 2$ și $a + b + c = 6 \Longrightarrow a = b = c = 2$ care nu verifică relația a doua
Deci b=2 , $a + c = 4, a^2 + c^2 = 10 \Longrightarrow a = 1$ și $c = 3$... ....**1p**

Subiectul 3.

Fie $A = \{n_1, n_2, \ldots, n_{11}\}$ o mulțime formată din 11 numere prime și $S = {n_1}^4 + {n_2}^4 + \cdots + {n_{11}}^4$.
Arătați că $S \vdots 10$ dacă și numai dacă $2 \in A$ și $5 \in A$.

Gazeta Matematică 5/2018

Soluție.
Dacă $n \geq 7$ și n este prim atunci . $n^4 - 1 \vdots 10$ ....**2 p**
Dacă $2 \in A$ și $5 \in A$ atunci $S = 2^4 + 5^4 + M_{10} + 9 \vdots 10$ **1p**
Dacă $S \vdots 10$ .Presupunem că $2 \notin A$. S este o sumă de 11 numere impare și deci S este impar, contradicție cu ipoteza **2p**
Presupunem că $5 \notin A$. Atunci $S = 2^4 + M_{10} + 10$ contradicție cu $S \vdots 10$ **2p**

Subiectul 4.

Se consideră punctele necoplanare *A*, *B*, *C* și *D*. Printr-un punct *M* de pe segmentul (*AB*) se duce un plan paralel cu dreptele *AC* și *BD*. Acest plan intersectează pe *BC* în *Q*, pe *CD* în *P* și pe *AD* în *N*.

a) Arătați că *MNPQ* este paralelogram.

b) Determinați poziția punctului *M* astfel încât aria paralelogramului *MNPQ* să fie maximă.

Soluție.
a) Fie $\alpha \parallel AC, \alpha \parallel BD, M \in \alpha$

$AC \parallel \alpha$, $AC \subset (ABC)$ și $(ABC) \cap \alpha = MQ \Longrightarrow MQ \parallel AC$ și analog $NP \parallel AC \Longrightarrow MQ \parallel NP \parallel AC$ **1p**

Analog $MN \parallel QP \parallel BD$ **1p**

$MQ \parallel NP$ și $MN \parallel QP \Longrightarrow MNPQ$ paralelogram **1p**

b) $A_{MNPQ} = MN \cdot MQ \cdot sin\left(\widehat{AC, BD}\right)$

$A_{MNPQ} = maxim\breve{a} \Leftrightarrow MN \cdot MQ = maxim$ **1p**

Notăm $\frac{AM}{AB} = k \Longrightarrow \frac{MN}{BD} = k$ și $\frac{MQ}{AC} = 1 - k \Longrightarrow MN = kBD$ și $MQ = (1 - k)AC$ **1p**

$MN \cdot MQ = k(1 - k) \cdot BD \cdot AC = maxim \Leftrightarrow k(1 - k) = maxim$...**1p**

$k(1 - k) \leq \frac{1}{4}$, egalitate se obține pentru $k = \frac{1}{2} \Leftrightarrow M$ este mijlocul segmentului (*AB*) **1p**